Ein Problem beim Geburtstagsproblem

Söhnke Gorenflo und Martin Sauer, Münster

Zusammenfassung: *Beim Geburtstagsproblem („Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von n Personen mindestens zwei am selben Tag Geburtstag haben?“) scheinen für Lernende auf den ersten Blick nur die Tage, an denen die Personen Geburtstag haben, und nicht deren Reihenfolge wichtig zu sein. Dennoch werden bei der Lösung genau diejenigen Kombinatorik-Figuren benutzt, bei denen explizit vorausgesetzt wird, dass bei den Ergebnis-Tupeln die Reihenfolge der Einträge wichtig ist – hier speziell die Reihenfolge der Geburtstage der Personen. Der Analyse dieses Problems dient dieser Artikel.*

1 Einleitung

In den Seminaren zur Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitstheorie innerhalb der Lehramtsausbildung an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster behandeln wir unter anderem klassische Probleme der Wahrscheinlichkeitstheorie, insbesondere das Geburtstagsproblem (vgl. Abschnitt 2) und ein Würfelproblem des Chevalier de Méré (vgl. etwa Kütting & Sauer 2014, S. 76–78 bzw. Abschnitt 3).

In Abschnitt 2 geht es um eine knappe Erläuterung des Geburtstagsproblems und um die Widerlegung einer bei Lernenden diesbezüglich oft genannten *falschen* These – nämlich: „Bei der Berechnung der Anzahl der günstigen Fälle ist die Reihenfolge der Geburtstage der anwesenden Personen unwichtig.“

In Abschnitt 3 wird eine Analogie zwischen dem Geburtstagsproblem und einem Würfelproblem des Chevalier de Méré hergestellt. Diese Analogie liegt in der Gemeinsamkeit hinsichtlich der Argumentation, mit der die jeweilige falsche These falsifiziert wird – eine Argumentation, die übrigens schon Blaise Pascal bei der Lösung des Würfelproblems des Chevalier de Méré benutzte.

Abschnitt 4 dient zur Aufdeckung eines gravierenden Unterschieds zwischen dem Geburtstagsproblem und dem Würfelproblem des Chevalier de Méré. Die Autoren vermuten, dass dieser Unterschied die Ursache dafür ist, dass Lernende sehr schnell die Falschheit der These von de Méré (beim Würfelproblem) erkennen, dagegen aber die Falschheit der oben genannten These (beim Geburtstagsproblem) nicht erkennen.

Zur Klärung der Notation vorab einige mathematische Bemerkungen:

Ein Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, wobei Ω die betrachtete Grundmenge (Ergebnismenge), $\mathcal{A}$ eine auf Ω definierte Sigma-Algebra und P ein Wahrscheinlichkeitsmaß, also eine Abbildung $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_0^+$ mit speziellen Eigenschaften, bezeichnet.

In unserem Artikel ist Ω immer eine endliche Menge, die zugehörige Sigma-Algebra ist $\mathcal{P}(\Omega)$, die Potenzmenge von Ω, und P (stillschweigend) immer das Laplace-Maß auf $\mathcal{P}(\Omega)$, also

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}_0^+ \text{ mit } P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \text{ für } A \in \mathcal{P}(\Omega).$$

Wird auf $\mathcal{P}(\Omega)$ ein anderes Maß als das Laplace-Maß betrachtet, wird dies ausdrücklich betont.

2 Das Geburtstagsproblem

2.1 Fragestellung und Lösung

Wir schildern zunächst kurz das Geburtstagsproblem (GP) und dessen Lösung (vgl. Haller & Barth 2017, S. 369–371).

Die in der Stochastik(didaktik) vertraute Fragestellung lautet: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von n in einem Raum anwesenden Personen mindestens zwei am selben Tag Geburtstag haben?

Auch die Lösung ist wohlbekannt und wird von Studierenden in unseren Seminaren regelmäßig vorgetragen. Wir nehmen an, dass für jeden einzelnen Geburtstag 365 Tage in Frage kommen (der 29.02. wird gestrichen) und diese 365 Tage mit gleicher Wahrscheinlichkeit möglich sind.

Mit A_n bezeichnen wir das Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit wir suchen. Offenbar ist für $n \geq 365$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich Eins. Daher sei $n < 365$. Die Wahrscheinlichkeit von A_n ist sehr schwer direkt zu berechnen, da der Ausdruck „mindestens zwei“ sehr viele Ereignisse beinhaltet. Der Trick besteht nun darin, das Gegenereignis $\overline{A_n}$ zu betrachten, also das Ereignis, dass alle Personen an paarweise verschiedenen Tagen Geburtstag haben.

Nach der Formel von Laplace muss man zur Berechnung von $P(\overline{A_n})$ die Anzahl der für $\overline{A_n}$ günstigen Möglichkeiten durch die Gesamtzahl aller möglichen Verteilungen von Geburtstagen für n Personen teilen. Diese Anzahlen bestimmen wir nun mit folgendem

Modell: Wir haben eine Urne mit 365 unterscheidbaren Kugeln (mit den Nummern 1 bis 365 für die Tage des Jahres).

Eine mögliche Verteilung von Geburtstagen auf die n Personen entspricht dann einer Ziehung von n Kugeln, wobei Wiederholungen möglich sind und die Reihenfolge wichtig ist. Mittels der kombinatorischen Figur „Geordnete Stichprobe mit Zurücklegen“ (vgl. Kütting & Sauer 2014, S. 144) erhält man 365^n mögliche Ergebnisse. Um die Anzahl der für $\overline{A_n}$ günstigen Ergebnisse zu bestimmen, muss man nur beachten, dass keine Kugel mehrfach gezogen werden darf, da die Geburtstage ja alle verschieden sein sollen. Mit der kombinatorischen Figur „Geordnete Stichprobe ohne Zurücklegen“ (vgl. Kütting & Sauer 2014, S. 142), erhält man für die Anzahl der für $\overline{A_n}$ günstigen Fälle $365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365-n+1)$.

Damit hat man

$$P(\overline{A_n}) = \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365-n+1)}{365^n}.$$

Die Rechenregel für die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses liefert

$$P(A_n) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365-n+1)}{365^n}.$$

Das Verblüffende an diesem Ergebnis ist nun, dass diese Wahrscheinlichkeit bereits bei $n=23$ Personen mit ca. 0,507 über 50 Prozent liegt. Bei $n=35$ liegt sie schon über 80 Prozent und bei $n=47$ sogar schon bei ca. 95,5 Prozent.

Dieses Ergebnis wird von Schülerinnen und Schülern wie auch von Studierenden als äußerst überraschend wahrgenommen. Auf die Gründe soll hier nicht weiter eingegangen werden. Eine interessante Analyse findet man etwa bei Büchter & Henn (2005, S. 201–203). Wer sich intensiver mit ähnlichen Problemen befassen will, wird bei Haller & Barth (2017, S. 369–380) fündig.

In unseren Seminaren kommt aber regelmäßig eine andere Frage auf, die wir in der Literatur so nicht gefunden haben: Wieso ist es bei der Bestimmung der möglichen und der günstigen Fälle wichtig, welche Person an welchem Tag Geburtstag hat? Diese Frage wird oft auch direkt schärfer in Form einer These formuliert.

2.2 These der Lernenden

Bei der Formulierung des Geburtstagsproblems ist nicht danach gefragt, welche „mindestens zwei“ Personen am selben Tag Geburtstag haben, deshalb ist die Reihenfolge der Geburtstage auch bei der Lösung unwichtig.

2.3 Reduktion auf drei Personen

Um These 2.2 genauer untersuchen und später einen Bezug zum Würfelproblem herstellen zu können, reduzieren wir das Geburtstagsproblem auf die Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von drei Personen mindestens zwei am gleichen Tag Geburtstag haben? (GP3)

Betrachten wir das zu dieser Frage gehörige Ereignis A_3, so erhalten wir

$$P(A_3) = 1 - P(\overline{A_3}) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363}{365^3} = \frac{1093}{133.225}.$$

Auch hier wird bei der Lösung unterschieden, welche Person an welchem Tag Geburtstag hat, obwohl in der Fragestellung scheinbar nur die Tage, an denen jemand Geburtstag hat, interessieren.

Warum ist das so?

Die für die Modellierung mit dem Laplace-Maß zu wählende korrekte Grundmenge ist

$$\Omega_{GP3} = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \{1, \ldots, 365\}, 1 \leq i \leq 3\},$$

dabei steht 1 für den 1. Januar, …, 365 für den 31. Dezember.

Es gilt: $|\Omega_{GP3}| = 365^3$.

Falls man jetzt aber behauptet, dass die Reihenfolge nicht wichtig ist, unterscheidet man nicht, wer an welchem Tag Geburtstag hat. Somit benutzt man die folgende Grundmenge

$$\tilde{\Omega}_{GP3} = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \{1, \ldots, 365\}, 1 \leq i \leq 3, x_1 \leq x_2 \leq x_3\},$$

für die gilt:

$$|\tilde{\Omega}_{GP3}| = \binom{365+3-1}{3} = \frac{365 \cdot 366 \cdot 367}{6} = 8.171.255.$$

Zur Erläuterung des Unterschieds betrachten wir zwei Ausgänge beispielhaft: Der Ausgang $(1,2,3)$ bedeutet bei der Modellierung mit der Grundmenge $\tilde{\Omega}_{GP3}$, dass die Geburtstage der drei Personen die ersten drei Tage des Januar sind. Bei der Modellierung mit der Grundmenge Ω_{GP3} bedeutet dieser Ausgang hingegen spezieller, dass die erste Person am 1. Januar, die zweite Person am 2. Januar und die dritte Person am 3. Januar Geburtstag hat. Der Ausgang $(1,1,1)$ bedeutet hingegen bei beiden Grundmengen, dass alle drei Personen am ersten Januar Geburtstag haben. Bei der Modellierung mit dem Laplace-Maß auf der Grundmenge $\tilde{\Omega}_{GP3}$ werden also das Ereignis, dass alle drei Personen am ersten Januar Geburtstag haben, und das Ereignis, dass alle drei Personen an den ersten drei Tagen des Jahres Geburtstag haben, als gleichwahrscheinlich angesehen. Das ist natürlich Unsinn: Für das Ereignis, dass alle am ersten Januar Geburtstag haben, gibt es nur eine Möglichkeit. Für das Ereignis, dass die Geburtstage der Personen die ersten drei Tage des Januar sind, gibt es dagegen sechs Möglichkeiten, nämlich genau so viele Möglichkeiten, wie es Anordnungen von drei paarweise verschiedenen Objekten auf drei Plätzen gibt.

These 2.2 ist damit schon widerlegt: Die Grundmenge $\tilde{\Omega}_{GP3}$ mit dem Laplace-Maß kann nicht für die Modellierung des Problems genommen werden.

Beim ursprünglichen Geburtstagsproblem wirkt sich der obige Sachverhalt noch ganz anders aus: Es gibt nur eine Möglichkeit für das Ereignis, dass alle n Personen am 1. Januar geboren wurden, aber $n!$ Möglichkeiten für das Ereignis, dass sie an den ersten n Tagen des Jahres geboren wurden.

Abschließend sei noch erwähnt, dass man GP3 auch mit der Grundmenge $\tilde{\Omega}_{GP3}$ lösen kann, indem man das Wahrscheinlichkeitsmaß pfiffig wählt. Dazu geht man wie folgt vor:

Man betrachtet die folgenden drei Mengen

$$E_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \{1, \ldots, 365\}, x_1 < x_2 < x_3\},$$

$$E_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \{1, \ldots, 365\}, x_1 < x_2 = x_3\}$$
$$\cup \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \{1, \ldots, 365\}, x_1 = x_2 < x_3\},$$

$$E_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \{1, \ldots, 365\}, x_1 = x_2 = x_3\}.$$

Die erste Teilmenge E_1 enthält diejenigen Tupel von $\tilde{\Omega}_{GP3}$, bei denen alle drei Einträge verschieden sind; diese Tupel lassen jeweils $3! = 6$ Permutationen zu. Die zweite Menge (E_2) enthält diejenigen Tupel von $\tilde{\Omega}_{GP3}$, bei denen genau zwei Einträge verschieden sind; diese Tupel lassen jeweils Permutationen zu. E_3 enthält die sechs Tupel von $\tilde{\Omega}_{GP3}$, die keine Permutationen zulassen.

Damit gilt $|\Omega_{GP3}| = 6 \cdot |E_1| + 3 \cdot |E_2| + |E_3|$.

Nun definiert man das Wahrscheinlichkeitsmaß $P : \mathcal{P}(\tilde{\Omega}_{GP3}) \to \mathbb{R}_0^+$ wie folgt:

$$P(A) := \frac{1}{216}\left(6 \cdot |A \cap E_1| + 3 \cdot |A \cap \mathrm{E}_2| + |A \cap E_3|\right) \text{ für}$$

$$A \in \mathcal{P}(\tilde{\Omega}_{GP3}).$$

3 Würfel und Geburtstagsproblem: Gemeinsamkeiten

Zunächst erinnern wir kurz an das Würfelproblem (WP): Der Schriftsteller und Lebemann Antoine Gombaud de Méré (1607–1684), dessen Freunde ihn *Chevalier* (dt.: Ritter) nannten, vermutete, dass beim Werfen von drei Würfeln die Wahrscheinlichkeit für die Augensumme 11 dieselbe ist wie für die Augensumme 12. Seine Argumentation lautete (in mathematischer Sprache) wie folgt:

„Sei S_1 das Ereignis ‚Augensumme 11‘ und S_2 das Ereignis ‚Augensumme 12‘.

Für S_1 gibt es die folgenden sechs Konstellationen: (1, 4, 6), (1, 5, 5), (2, 3, 6), (2, 4, 5), (3, 3, 5), (3, 4, 4).

Für S_2 gibt es die folgenden sechs Konstellationen: (1, 5, 6), (2, 4, 6), (2, 5, 5), (3, 3, 6), (3, 4, 5), (4, 4, 4).

Da es jeweils sechs Tupel gibt, sind die beiden Ereignisse gleich wahrscheinlich.“

Im Folgenden wird dargelegt, dass die These von Chevalier de Méré auf derselben Fehlvorstellung beruht wie These 2.2 beim Geburtstagsproblem.

De Mérés Fehler, den Blaise Pascal (1623–1662) in einem Briefwechsel mit ihm aufdeckte, bestand darin, dass jener statt des Laplace-Maßes auf der Grundmenge

$$\Omega_{WP} = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \{1, \ldots, 6\}, 1 \le i \le 3\}$$

das Laplace-Maß auf der Grundmenge

$$\tilde{\Omega}_{WP} = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \{1, \ldots, 6\}, 1 \le i \le 3, x_1 \le x_2 \le x_3\}$$

betrachtete.

De Méré betrachtete die Würfel also als nicht unterscheidbar: Anstatt alle möglichen Reihenfolgen einer Augenzahlen-Konstellation zu betrachten, legte er eine Reihenfolge fest – nämlich diejenige Reihenfolge, die sich durch aufsteigende Anordnung der Augenzahlen nach Größe ergibt $(x_1 \le x_2 \le x_3)$. Diese von ihm vorgenommene Anordnung der Augenzahlen in aufsteigender Reihenfolge zerstört die Gleich-Wahrscheinlichkeit und führt zu der Grundmenge $\tilde{\Omega}_{WP}$, auf der sich das Problem nicht mithilfe des Laplace-Maßes lösen lässt.

Man sieht, dass sowohl beim Geburtstagsproblem als auch beim Würfelproblem von de Méré die Reihenfolge wichtig ist, damit man überhaupt gleichwahrscheinliche Ereignisse hat.

Es ist also naheliegend, dass diejenigen, die These 2.2 vertreten, genau denselben Fehler machen, welchen schon de Méré machte.

Der Vollständigkeit halber sei noch angemerkt, dass gilt

$$|\Omega_{WP}| = 6^3 = 216 \text{ und } |\tilde{\Omega}_{WP}| = \binom{6+3-1}{3} = 56.$$

Die korrekten Wahrscheinlichkeiten lauten

$$P(S_1) = \frac{27}{216} \text{ und } P(S_2) = \frac{25}{216}.$$

Außerdem sei noch erwähnt, dass man das Würfelproblem auch auf der Grundmenge $\tilde{\Omega}_{WP}$ lösen kann, indem man das Wahrscheinlichkeitsmaß pfiffig wählt.

4 Würfel und Geburtstagsproblem: Unterschiede

Im Folgenden werden wir die für die korrekte Modellierung mit dem Laplace-Maß falsche (!) Grundmenge sowohl beim Würfelproblem als auch bei GP3 genauer analysieren. Durch diese Analyse ist es dann möglich, einen didaktisch interessanten Unterschied zwischen der (falschen) These von de Méré und der (falschen) These 2.2 herauszustellen.

4.1 Würfelproblem des Chevalier de Méré

Wir betrachten zunächst wieder das Zufallsexperiment des Werfens von drei unterscheidbaren Würfeln. Die von de Méré benutzte Grundmenge $\tilde{\Omega}_{WP}$ kann man (analog zum Vorgehen bei der Anmerkung am Ende des Abschnitts 2.3) nun wie folgt in paarweise disjunkte Teilmengen zerlegen:

$$\tilde{\Omega}_{WP} = \bigcup_{i=1}^{3} B_i, \text{ wobei}$$

$$B_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \{1,\ldots,6\}, x_1 < x_2 < x_3\},$$

$$B_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \{1,\ldots,6\}, x_1 < x_2 = x_3\}$$
$$\cup \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \{1,\ldots,6\}, x_1 = x_2 < x_3\},$$

$$B_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \{1,\ldots,6\}, x_1 = x_2 = x_3\}.$$

Wir geben zur Übersicht die Verteilung der 3-Tupel aus $\tilde{\Omega}_{WP}$ auf die drei Mengen $B_i\,(1 \le i \le 3)$ an:

Menge	3-Tupel
B_1	(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 2, 6), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 3, 6), (1, 4, 5), (1, 4, 6), (1, 5, 6), (2, 3, 4), (2, 3, 5), (2, 3, 6), (2, 4, 5), (2, 4, 6), (2, 5, 6), (3, 4, 5), (3, 4, 6), (3, 5, 6), (4, 5, 6).
B_2	(1, 2, 2), (1, 3, 3), (1, 4, 4), (1, 5, 5), (1, 6, 6), (2, 3, 3), (2, 4, 4), (2, 5, 5), (2, 6, 6), (3, 4, 4), (3, 5, 5), (3, 6, 6), (4, 5, 5), (4, 6, 6), (5, 6, 6), (1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 1, 4), (1, 1, 5), (1, 1, 6), (2, 2, 3), (2, 2, 4), (2, 2, 5), (2, 2, 6), (3, 3, 4), (3, 3, 5), (3, 3, 6), (4, 4, 5), (4, 4, 6), (5, 5, 6).
B_3	(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3), (4, 4, 4), (5, 5, 5), (6, 6, 6).

Besonders wichtig für unsere Argumentation ist hier die Menge B_1, deren Elemente die maximale Anzahl von Permutationen (also sechs) zulassen.

Wir betrachten jetzt erneut die Ereignisse S_1 (Augensumme 11) und S_2 (Augensumme 12) aus Abschnitt 3. Legt man die These von de Méré zugrunde und betrachtet die für die Modellierung mit dem Laplace-Maß falsche Grundmenge $\tilde{\Omega}_{WP}$, dann gilt: Die für das Ereignis S_1 günstigen Tupel liegen in B_1 und B_2; die für das Ereignis S_2 günstigen Tupel liegen in B_1, B_2 und B_3. Es sind also alle Mengen $B_i\,(1 \le i \le 3)$ beteiligt!

4.2 Geburtstagsproblem für drei Personen

Nun kehren wir zum Geburtstagsproblem für 3 Personen zurück. Hier haben wir analog:

$$\tilde{\Omega}_{GP3} = \bigcup_{i=1}^{3} E_i,$$

wobei $E_i\,(1 \le i \le 3)$ die am Ende von Abschnitt 2.3 eingeführten Mengen sind.

Wir betrachten erneut das Ereignis A_3 („Mindestens zwei von drei Personen haben am gleichen Tag Geburtstag.“) und das zur Berechnung von $P(A_3)$ nötige Gegenereignis $\overline{A_3}$. Legt man These 2.2 zugrunde und betrachtet die für die Modellierung mit dem Laplace-Maß falsche Grundmenge $\tilde{\Omega}_{GP3}$, dann gilt: Alle für das Ereignis $\overline{A_3}$ günstigen Tupel liegen in der Menge E_1, genauer: $\overline{A_3}$ ist identisch mit E_1.

Es ist also letztlich nur die Menge E_1 beteiligt!

Entsprechendes gilt für das ursprüngliche Geburtstagsproblem: Auch hier sind bei Zugrundelegung der für die Modellierung mit dem Laplace-Maß falschen Grundmenge nur Tupel beteiligt, welche die maximale Anzahl von Permutationen (nämlich $n!$) zulassen.

5 Fazit

Wir fassen das bisher Gesagte kurz zusammen:

Unter Zugrundelegung der für die Modellierung mit dem Laplace-Maß falschen Grundmenge $\tilde{\Omega}_{WP}$ beim

Würfelproblem lassen die Tupel für S_1 (Augensumme 11) und S_2 (Augensumme 12) *ganz verschiedene Anzahlen* von Permutationen zu (also eine Permutation, drei Permutationen und sechs Permutationen).

Unter Zugrundelegung der für die Modellierung mit dem Laplace-Maß falschen Grundmenge beim Geburtstagsproblem lassen alle (!) zum Gegenereignis $\overline{A_n}$ (aus Unterabschnitt 2.1) gehörigen Tupel die *gleiche Anzahl* von Permutationen zu (nämlich die maximal mögliche Anzahl $n!$).

Wieso wird nun die für die Modellierung mit dem Laplace-Maß falsche Grundmenge beim Würfelproblem eher erkannt als beim Geburtstagsproblem? Die Autoren haben bezüglich der Beantwortung dieser Frage eine Vermutung:

Vielleicht ist die fehlerhafte These von de Méré beim Würfelproblem deshalb leichter durchschaubar, weil (bei Betrachtung der für die Modellierung mit dem Laplace-Maß falschen Grundmenge $\tilde{\Omega}_{WP}$) die günstigen Tupel *verschiedene Anzahlen von Permutationen* zulassen. Lernende äußern nämlich, wenn sie mit der Argumentation von de Méré konfrontiert werden, beim Ereignis „Augensumme 12“ sehr schnell ein mehr oder weniger diffuses Unbehagen bezüglich der beiden Tupel (3, 4, 5) und (4, 4, 4); manche sagen auch sehr schnell, dass diese Tupel nicht die gleichen Chancen bzw. Wahrscheinlichkeiten haben.

Dagegen ist die fehlerhafte These 2.2 beim Geburtstagsproblem weit schwieriger zu durchschauen, weil (bei Betrachtung der für die Modellierung mit dem Laplace-Maß falschen Grundmenge) alle für $\overline{A_n}$ günstigen Tupel *die gleiche Anzahl von Permutationen* zulassen. Erst wenn man Tupel betrachtet, die nicht in $\overline{A_n}$ liegen (und somit für die Lösung irrelevant erscheinen), kann man dieselbe Fehleranalyse wie beim Würfelproblem anwenden und den Fehler klar bemerken.

Literatur

Kütting, H. & Sauer, M. (2014): Elementare Stochastik. 3. Auflage. Korrigierter Nachdruck. Berlin & Heidelberg: Springer Spektrum.

Büchter, A. & Henn, H.-W. (2005): Elementare Stochastik. Berlin & Heidelberg: Springer.

Haller, R. & Barth, F. (2017): Berühmte Aufgaben der Stochastik. 2. Auflage. Berlin & Boston: Walter de Gruyter.

Anschrift der Verfasser

Söhnke Gorenflo & Martin J. Sauer
Institut für Didaktik der Mathematik
und der Informatik
Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Einsteinstraße 62
48149 Münster
gorenflo@uni-muenster.de
mjsauer@uni-muenster.de

Madrigal

Au temps heureux où régnoit l’innocence,
On goûtoit en rimant mille et mille douceurs;
Et les Amans ne faisoient de dépense
Qu’en soins et qu’en tendres ardeurs.

Mais aujourd’hui sans l’opulence
Il faut renoncer aux plaisirs;
Un Amant qui ne peut dépenser qu’en soupirs
N’est plus payé qu’en espérance.

(Antoine Gombaud, genannt Chevalier de Méré)

Madrigal

Einst unbefangen in glücklichen Zeiten
Berührten uns Verse ohne Zahl; bereit
Die Schatulle all jener, die freiten,
Behutsam gefüllt mit Zärtlichkeit.

Armselig hingegen heutzutage
Verzichten wir auf das freudige Werben:
Wenn ein Freier nur Seufzer kann vererben,
So bleibt ihm als Lohn nur die sehnende Klage.

(dt. Übersetzung: Henning von Ziegesar)